PART3　2次方程式の解の判別

要点① 2次方程式の解の種類と判別式

方程式の解のうち，実数であるものを「　　　」，虚数であるものを「　　　」という。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

この解の種類は，根号の中の式 b^2-4ac の符号によって，次の①～③に分類することができる。

① b^2-4ac　　　のとき，異なる2つの　　解

② b^2-4ac　　　のとき，ただ1つの　　解(　　)

③ b^2-4ac　　　のとき，異なる2つの　　解

b^2-4ac を，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「　　　」といい，記号「　」で表す。

2次方程式の解の種類の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解と判別式 $D=b^2-4ac$ について，次のことが成り立つ。

$D>0$　⇔　異なる2つの実数解をもつ

$D=0$　⇔　重解をもつ

$D<0$　⇔　異なる2つの虚数解をもつ

※ 2次方程式の異なる2つの虚数解は，互いに共役な複素数である。

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式は

$$D=(2b')^2-4ac=4\left(b'^2-ac\right)$$

であるから，解の判別の際に，D の代わりに

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

を用いてもよい。

【MEMO】

3 (1) 次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

(i) $2x^2-3x+4=0$　(ii) $3x^2+4x-1=0$

(iii) $x^2+2\sqrt{3}\,x+3=0$

(2) 2次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ が実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について

$D>0$ ⇔ 異なる2つの実数解をもつ

$D=0$ ⇔ 重解をもつ

$D<0$ ⇔ 異なる2つの虚数解をもつ

特に $b=2b'$ のときは，D の代わりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

2次方程式が実数解をもつ条件

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

実数解をもつ ⇔ $D\geqq 0$

第 3 講　PART3 確認問題

次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

1　2 次方程式 $2x^2+5x+1=0$ は，［ア］。

① 異なる 2 つの実数解をもつ
② 重解をもつ
③ 異なる 2 つの虚数解をもつ

2　2 次方程式 $x^2-3x+6=0$ は，［イ］。

① 異なる 2 つの実数解をもつ
② 重解をもつ
③ 異なる 2 つの虚数解をもつ

3　2 次方程式 $4x^2+4x+1=0$ は，［ウ］。

① 異なる 2 つの実数解をもつ
② 重解をもつ
③ 異なる 2 つの虚数解をもつ

4　2 次方程式 $x^2+ax-a+3=0$ が虚数解をもつとき，定数 a の値の範囲は，［エオ］$<a<$［カ］である。

PART3　2次方程式の解の判別

3　(1)　次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

(i)　$2x^2-3x+4=0$　　(ii)　$3x^2+4x-1=0$

(iii)　$x^2+2\sqrt{3}\,x+3=0$

(2)　2次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ が実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[解答]

(1)　2次方程式の判別式を D とする。

(i)　$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot4=9-32=-23<0$

よって，異なる2つの虚数解をもつ

(ii)　$\dfrac{D}{4}=2^2-3\cdot(-1)=7>0$

よって，異なる2つの実数解をもつ

(iii)　$\dfrac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot3=3-3=0$

よって，重解をもつ

(2)　この2次方程式の判別式を D とすると，実数解をもつから，$D\geqq0$

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(a+2)=a^2-a-2=(a-2)(a+1)$$

よって，$(a-2)(a+1)\geqq0$ より，求める a の値の範囲は $a\leqq-1$，$2\leqq a$

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\cdot2\cdot1=25-8 \quad \text{[A]}$$

$$=17>0$$

よって，**異なる 2 つの実数解をもつ。** [B]

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式
$D=b^2-4ac$

[B]
$D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ

2

[正解] イ：③

[解説]

2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot6=9-24$$

$$=-15<0$$

よって，**異なる 2 つの虚数解をもつ。** [C]

[C]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について
$D<0 \iff$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

3

[正解] ウ：②

[解説]

2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-4\cdot1=4-4$$

$$=0$$

よって，**重解をもつ。** [D]

[D]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について
$D=0 \iff$ 重解をもつ

4

[正解] エオ：-6，カ：2

[解説]

この 2 次方程式の判別式を D とすると，虚数解をもつための条件は $D<0$ [E]

$$D=a^2-4\cdot1\cdot(-a+3)$$
$$=a^2+4a-12$$
$$=(a-2)(a+6)$$

よって

$$(a-2)(a+6)<0$$

求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-6<a<2}$$

[E]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると
　虚数解をもつ $\Longleftrightarrow$ $D<0$